798
788
1586 264

Volterra

LA STATICA DEGLI EDIFIZJ

SAGGIO FISICO-MATEMATICO

DA DARSI NEL COLLEGIO

DI S. MICHELE

DI VOLTERRA

SOTTO LA DIREZIONE DEI PP. DELLE SCUOLE PIE

DAI SIGNORI

CONTE GIUSEPPE DE' GENTILI *di Viterbo, Accademico in Lettere ed Arti, Candidato in Filosofia, e Console dell' Accademia dei Costanti.*

GIULIO CESARE MAFFEI *di Volterra, Accademico in Lettere, Candidato in Filosofia, e Censore dell' Accademia.*

CONTE MARCHESE LEOPOLDO CARLO GINORI *di Firenze, Accademico in Arti, e Candidato in Filosofia e Lettere.*

Studenti di Fisica - Matematica nel suddetto Collegio.

Data a chiunque la facoltà d' interrogare ed obiettare.

FIRENZE 1805.

Presso Pietro Allegrini Stampatore alla Croce Rossa

Con Approvazione.

1. LA *Statica degli Edifizj*, porzione sì preziosa ed utile della civile Architettura, ha per oggetto di provvedere alla fermezza e solidità delle Fabbriche. Non s' interessa perciò nè delle proporzioni, nè dell'ornato, se non dentro i limiti di quel solo rapporto che unisce l'une e l'altro al primario ed essenziale suo fine.

2. La solidità d'una Fabbrica si distingue in *apparente e reale*. L'apparente richiede che le parti tutte dell'Edifizio si mostrino connesse fra loro, e l'occhio trovi dovunque una ragione della loro stabilità, e di quella di tutto il complesso. In conseguenza è necessario che i vani corrispondano in perfetta linea verticale, che il vivo riposi sul vivo, che le parti più deboli compariscano meno aggravate delle più forti, e queste si appoggino a basi più consistenti e di più estese dimensioni. La solidità reale ricerca che tutte le forze contrastino esattamente e si annullino le une con l'altre, che gli urti e le spinte delle parti verticali eguaglino le resistenze delle orizzontali, e le basi e gli appoggi abbiano una robustezza proporzionata al carico che deve aggravarli.

3. I Canoni della solidità apparente richiamano a delle regole ormai bastantemente fissate e dal gusto e da alcuni Elementi di Geometria e di Prospettiva. Quelli della solidità reale dipendono interamente dalla Meccanica: ond'è che l'Architetto premuroso di bene apprenderli per concepire e condurre a termine Opere ragionate e durevoli, sente tutto il bisogno di un pieno e profondo possesso delle Matematiche.

4. I Canoni della solidità reale formano l'unico scopo di questo Saggio. Esso non sarà, che un elenco di quanto hanno o prodotto o raccolto sui diversi articoli del presente Soggetto Galileo, il Grandi ed il Frisi, e soprattutto Bossut e Prony, questo nell'Architettura Idraulica, l'altro nelle due celebri Memorie sulle Volte, che per la novità ed eleganza dei metodi, per la sottigliezza e profondità dell'Analisi, e per la bontà ed estensione dei risultati, vengono riputate dai Dotti come Capi d'opera in questo genere.

5. Con la scorta dunque di sì celebri Matematici, e dentro i confini di quella brevità che non ci è permesso d' offendere, noi ragioneremo della Resistenza de' Solidi nel modo che sogliono impiegarsi in costruire, dell' Equilibrio e Spinta degli Archi e delle Volte a qualunque sesto, della reazione delle Muraglie e dei Piè dritti contro le Volte, ed infine della miglior maniera di erigere Edifizj destinati a sostenere il peso dei fluidi o a reggere all' urto dei Cannoni e delle Bombe.

Ma come il pieno e chiaro sviluppo delle proposte Dottrine esige un continuo e franco maneggio di principj dedotti dalle Teorie della Composizione e Decomposizione delle Forze, dei Momenti, dei Centri di Gravità, e dell' Equilibrio nella Leva e nel Cuneo, stimiamo a proposito di premettere un succinto ragguaglio di tutte queste Teorie. Le esporremo dunque nella Prima Parte di questo Trattato, riserbandoci interamente nella Seconda a farne le applicazioni al primario nostro Soggetto.

PRIMA PARTE

Composizione e Decomposizione delle forze.

6. Sieno F, f due forze omogenee che applicate insieme contro il Mobile M tendano a fargli scorrere gli spazj ME $= a$, MI $= b$ nell' egual tempo T. E' manifesto che il Mobile non potrà dirigersi nè per ME nè per MI, e perciò dovrà determinarsi per una terza linea al di dentro dell' angolo IME. Sia frattanto P un punto qualunque di questa linea e condotta PL parallela ad IM si faccia ML $= x$, LP $= y$. L'una e l'altra di queste due coordinate denoteranno respettivamente i progressi di M nei sensi di ME, MI fatti in un tempo stesso t. Dunque x esprimerà l' effetto prodotto nel tempo t dalla forza F, ed y esprimerà quello prodotto nel tempo stesso dalla forza f. Si avrà quindi per la natura delle forze omogenee $x : y :: F : f :: a : b$, e perciò $x = \frac{ay}{b}$, luogo geometrico alla diagonale del Parallelogrammo MENI. Dunque 1°. *Un mobile spinto da due forze omogenee và per la diagonale del Parallelogrammo fatto dalle linee che le rappresentano.* Inoltre poichè l' omogeneità delle forze dà parimente $y : b :: T : t$ sarà $y = \frac{bT}{t}$; d' onde apparisce, che non potrà il Mobile giungere in N ed essere $y = b$, senza che sia $t = T$. Dunque 2°. *Il Mobile M percorrerà la diagonale MN nel tempo stesso che avrebbe separatamente percorsa ciascuna delle rette* ME, MI. Perciò chiamata φ la forza che nel tempo T spingerebbe il corpo M in N per la diagonale MN, si avrà $\varphi : F : f ::$ MN : ME : MI, e di quì $\varphi : F + f ::$ MN : ME + MI. Dunque 3°. *L' effetto riunito delle due forze starà alla lor somma nel rapporto della diagonale alla somma dei lati: e se con ciascuno dei lati si rappresentino le forze* F, f, *la diagonale* MN *rappresenterà sempre il loro effetto riunito o la lor risultante, e viceversa.*

FIG. I.

7. E quì può osservarsi 1°. che come la diagonale MN è sempre nel piano del parallelogrammo IE, così *la risultante di due*

forze è sempre nel piano delle loro direzioni. 2°. che avendosi φ : FIG. F : f : : MN : ME : MI (= EN) : : *sen* MEN (= *sen* IME) : *sen* MNE (= *sen* IMN) : *sen* EMN, *ciascuna forza potrà rappresentarsi col seno dell' angolo compreso fra l' altre due*. 3°. Che supposto successivamente $<, >$ ed $= 90°$ l' angolo IME e condotte da N le normali NQ, NQ′, esprimeranno MQ, MQ′ gli avanzamenti del Mobile nei sensi di ME, MI prodotti insieme dalle due forze congiunte; e si avrà nel primo caso MQ > ME, MQ′ > MI; nel secondo MQ < ME, MQ′ < MI, nel terzo MQ = ME, MQ′ = MI: onde le *due forze cospirano insieme quando è acuto l' angolo delle lor direzioni, si distruggono in parte quando è ottuso; ma qualora sia retto, l' azione dell' una non acquista nè soffre per l' azione dell' altra, ed ambedue producono sul mobile l' effetto stesso come se agissero separate*.

1. 2. 3.

8. Sia frattanto x l' angolo MEN, si avrà in generale MN = $\varphi = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos x)}$; ove fatta $x = 180°$, risulta $\varphi = a + b$, e fatta $x = 0$, si ottiene $\varphi = a - b$. Ma $x = 180°$ suppone parallele le forze e cospiranti in un senso stesso, ed $x = 0$ le suppone parallele ed opposte; dunque *la risultante di due forze parallele (e perciò anche di due concorrenti) eguaglia la somma o la differenza delle forze motrici, secondo che agiscono in un senso stesso o diverso*.

9. Per determinarne la direzione che visibilmente dovrà esser parallela a quella delle due forze, osserveremo che nell' una e nell' altra ipotesi di $x = 180°$, $x = 0$ i seni degli angoli IME, 4. IMN, NME (7. 2°) si cangiano nelle normali IK, KM, MI che determinano le distanze reciproche delle tre direzioni, e si ha perciò φ : F : f : : IK : IM : MK. Or poichè in generale quando l' angolo MNE è acuto, cioè quando le forze sono cospiranti, 1. 2. si ha sempre *sen* NME < *sen* IME, e quando è ottuso si ha *sen* NME > *sen* IME, così se le forze son parallele, avremo nel primo caso IM < IK e la direzione della risultante sarà media fra quella delle due forze, e nel secondo avremo IM > IK e la direzione della risultante sarà al di là di quella della forza minore. Sia frattanto OV un' obliqua qualunque condotta fra le tre 4. parallele. Si avrà φ : F : : IK : IM : : OV : OM, onde OM = F $\times \frac{OV}{\varphi}$, espressione che determina il punto M per cui deve passare la risultante delle due forze parallele.

10. Se nell' equazione $\phi = a - b$ sia $a = b$ si avrà la risultante $\phi = 0$, cioè il mobile non avrà verun movimento di traslazione, e solo potrà averne uno di rotazione intorno a quel punto per cui la risultante passerebbe se le forze non fossero opposte. Se poi le forze opposte si cangino di parallele in concorrenti, cesserà di aver luogo anche il movimento di rotazione, e risulterà allora l' equilibrio assoluto che in altri casi non potrà ottenersi giammai.

11. Tuttociò è relativo ad un sistema di due sole forze. Che se si abbia un sistema di un numero di forze maggiore, e sieno queste parallele o ad angolo, situate o nò in un medesimo piano, componendole a due a due e componendone successivamente le risultanti, si potrà sempre giungere con gli stessi principj a riunirle sotto una risultante finale. E reciprocamente una forza comunque assegnata potrà risolversi in un numero qualunque di altre dirette in piani dati ad arbitrio, purchè sempre le forze composte o decomposte restin rappresentate dalla diagonale del parallelogrammo i cui lati esprimano quelle due dalle quali ciascuna forza è risultata, o nelle quali è stata risoluta.

12. Se il sistema è in equilibrio, la risultante finale di tutte le forze che lo animano, è necessariamente zero (10). Inoltre ciascuna forza, e in generale la risultante di un numero qualunque di forze, eguaglia e si oppone in direzione alla risultante di tutte l'altre: diversamente non sussisterebbe equilibrio fra queste due (10) e in conseguenza neppur nel sistema che rappresentano.

13. Laonde se il sistema è composto di sole tre forze, dovran queste trovarsi in un medesimo piano, e concorrere con le lor direzioni in un medesimo punto (6.7.1°) di più la direzione di ciascuna di esse sarà nel prolungamento della diagonale spettante al parallelogrammo che ha per lati le direzioni delle altre due (6.1°). E se a, b, c sieno gli angoli respettivamente compresi dalle direzioni di F ed f, di ϕ ed f', di F e ϕ, avremo $\phi : F : f :: sen\, a : sen\, b : sen\, c$ (7.2°).

14. Se il sistema riposi sospeso ad un filo, o ad una verga flessibile, la risultante passerà per il punto di sospensione, seconderà la direzione del filo o della verga, e ne eguaglierà precisamente la tensione e la forza. Se poi sia sostenuto da un' asse o punto fisso ed immobile, basterà per l' equilibrio che la ri-

FIG. sultante passi per il centro d' appoggio. E per ultimo se tutte le forze del sistema sieno o si riducano ad esser parallele, la somma di quelle prese in un senso o positive, eguaglierà la somma di quelle prese nel senso opposto o negative.

15. Se le forze del sistema in equilibrio si decompongano in due o in tre risultanti normali fra loro, ciascuna di queste sarà necessariamente eguale a zero. Poichè non avendo l' una azione sull' altra (7 . 3°) i loro impulsi non possono scambievolmente distruggersi nè alterarsi; onde qualora avessero separatamente un valore effettivo, lo avrebbe altresì la loro risultante comune, e il sistema non potrebbe supporsi in riposo. Quindi se ciascuna delle forze si risolva in due o in tre componenti x, y, z parallele respettivamente fra loro a due o a tre assi ortogonali X, Y, Z concorrenti in un punto dato di posizione, le somme parziali delle x, delle y, e delle z dovranno riguardarsi come nulle, e come costituenti tre diversi sistemi in equilibrio. E perciò supposte P, P' le risultanti eguali ed opposte a cui posson ridursi le x, e Q, Q', R, R' quelle in cui posson comporsi le y e le z, avremo $P + P' = 0$, $Q + Q' = 0$, $R + R' = 0$.

Momenti.

5. 6. 16. Dal punto A preso nel piano delle tre forze F, f, φ si conducano sopra ME, MI, MN le tre normali AB, AC, AD, ed ai quattro vertici M, E, N, I le rette AM, AE, AN, AI. Inoltre prolungata AM indefinitamente in G ed H, si conducano ad essa le normali EG, NO, IH, e da I la parallela IK. Sarà $HI = AK$ e $KN = GE$ attesi i triangoli eguali e simili IKN, MGE, e perciò secondo che il punto A sarà preso al di dentro, o al di fuori dell' angolo EMI l' altezza NO del triangolo AMN eguaglierà la differenza o la somma dell' altezze IH, EG dei triangoli IAM, EAM. Onde poichè questi triangoli hanno una base comune AM, e perciò le lor superficie S, S', S'' stanno come l' altezze, si avrà dunque in generale $S = S' \pm S''$, ovvero $\frac{MN \times AD}{2} = \frac{ME \times AB}{2} \pm \frac{MI \times AC}{2}$, ossia $\varphi \times AD = F \times AB \pm f \times AC$, e nel caso che sia $AD = 0$, cioè che il punto A sia preso nella diagonale, si avrà $f \times AC = \mp F \times AB$.

FIG. 5. 6.

17. I prodotti $\Phi\times AD$, $F\times AB$, $f\times AC$ di ciascuna delle tre forze nella lor distanza da un punto fisso o anche da un asse o da un piano fisso, si chiamano momenti; ed il punto, asse o piano fisso prendono il nome di centro, asse o piano dei momenti. Può frattanto concludersi riguardo al centro o punto fisso, che *se questo sia al di fuori o al di dentro dell' angolo delle due forze, il momento della risultante eguaglia respettivamente la somma o la differenza dei momenti delle forze motrici; se poi cada nella direzione della risultante, i momenti delle forze motrici debbono eguagliarsi fra loro*. Che se ciascuna delle due forze si consideri come risultante di tutte quelle in cui sarebbe possibile decomporle, e si immagini il loro sistema mobile intorno al centro o punto fisso A, potrà stabilirsi in somma, che *il momento della risultante eguaglia i momenti delle forze che tendono a far girare il sistema da una parte, meno quelli che tendono a farlo girare dall' altra*; o anche più generalmente che *il momento della risultante eguaglia la somma dei momenti di tutto il sistema presi negativamente o positivamente, secondo che si troveranno in una stessa o diversa parte rapporto al centro fisso comune. Che se il centro si trovi nella direzione della risultante, e in conseguenza il sistema sia in equilibrio* (14), *la suddetta somma dei momenti sarà eguale a zero*.

18. E l' istesso può asserirsi riguardo all' asse dei momenti se le forze sieno parallele. Poichè condotta AG perpendicolare alla direzione delle tre forze, e dai punti d' incontro K, M, I le normali KE, MH, IG sull' asse AG, si avrà $AM : AK : AI :: MH : KE : IG$; e perciò $\phi\times AM : F\times AK : f\times AI :: \phi\times MK : F\times KE : f\times IG$. Ma preso A per centro fisso, abbiamo $\phi\times AM = F\times AK \pm f\times AI$ (16); dunque sarà ancora $\phi\times MK = F\times KE \pm f\times IG$.

4.

19. Ed infine la medesima proprietà può dimostrarsi ancora riguardo al piano dei momenti, supposto sempre che le forze sieno parallele. Poichè ridotte le forze a due, e determinata nel loro piano la lor risultante, l' intersezione di questo piano con quello dei momenti fisserà una linea, riguardo alla quale potrà applicarsi interamente il raziocinio fatto rapporto all' asse.

Centri di Gravità.

FIG. 7.

20. Quel punto, sospeso il quale, tutta la massa del solido, comunque situata, sta in equilibrio, si chiama centro di gravità del solido o della massa. Onde se AB, DE sieno le risultanti dei pesi di ciascuna Molecola in due diverse situazioni del solido ADDE, il centro di gravità deve trovarsi nel loro concorso C, e in questo punto potrà considerarsi come riunito tutto l'effetto del peso o di qualunque sforzo del solido.

21. Sieno frattanto M, m due masse coi centri di gravità C, C' uniti insieme mediante la verga CC' inflessibile e non pesante. Considerandone i pesi P, p come forze, è manifesto, che se le due masse si trovino in una medesima verticale, la risultante sarà in direzione della linea CC'; diversamente dovrà intersecarla in qualche punto L. Questo punto potrà dunque riguardarsi come centro di gravità del sistema (20); e presolo per punto fisso dei momenti, si avrà $P\times CL = p\times C'L$ (17). Ma chiamata g la gravità universale, è noto che $P = Mg$, $p = mg$; dunque $Mg\times CL = mg\times C'L$ ed $M:m :: C'L : CL$, cioè 1°. *due masse stanno in ragione inversa delle lor distanze dal centro comune di gravità;* 2°. *il centro comune di gravità di due masse si ha dividendone la distanza dei particolari centri di gravità in ragione inversa delle masse medesime.*

22. Di quì si ha una facil maniera per trovare i centri di gravità delle linee, superficie e solidi di figura nota e di densità uniforme. Sia $AVE = s$ una linea qualunque con le coordinate $AB = x$, $BE = y$ e col centro di gravità in M. Se questa linea si accresca dell' elemento infinitesimo $Ee = ds$, e si unisca M con E, centro di gravità dell' elemento, scenderà in G il centro di gravità del sistema, e si avrà (21.1°) $s : ds :: EG : MG$ ossià $:: EM : MG$ per essere MG infinitesima come ds. Ma condotte le normali MN, Gn, MO, si ha $EM : MG :: OE : QG :: MO : MQ$; fatte dunque $AN = u$, $NM = z$, e perciò $OE = y - z$, $MO = x - u$, $QG = dz$, $Nn = du$, si avrà $s : ds :: y - z : dz :: x - u : du$; e quindi 1°. $sdz = yds - zds$, ed $sz = \int yds$; 2°. $sdu = xds - uds$, ed $us = \int xds$, equazioni che fanno conoscere il centro cercato quando sia nota la qualità della curva, e si abbia perciò s dato per x o per y. Così se AVE di-

FIG. 8.

venga una linea retta, avremo $y = 0$, $s = x$, e quindi $z = 0$ ed $u = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$, cioè il centro di gravità cade in questo caso sulla precisa metà di AB.

FIG.

23. Sia in secondo luogo AVEB una superficie piana con le stesse coordinate AB, BE e col centro di gravità nel solito punto M. Aggiunto ad AVEB l'elemento Be e unito M col di lui centro di gravità F, che deve trovarsi sulla metà di Be o di BE (20), potrà supporsi in D il centro di gravità del sistema. E poichè $Be = ydx$, e perciò $AVEB = \int ydx$, avremo come sopra (22) $\int ydx : ydx :: FD : MD :: (22. 1^\circ.)\ FM : MD :: FO : DQ :: OM : MQ :: z - \frac{y}{2} : -dz :: x - u : du$, d'onde 1°. $dz\int ydz = \frac{y^2dx}{2} - zydx$, e $z\int ydx = \frac{1}{2}\int y^2dx$; 2°. $du\int ydx = xydx - uydx$; ed $u\int ydx = \int xydx$. Così se AVEB sia un triangolo coi lati AB, BE nella ragione di $a : b$, sarà $y = \frac{bx}{a}$ e in conseguenza $z = \frac{y}{3}$ ed $u = \frac{2x}{3}$: cioè si avrà il centro di gravità di un triangolo, se ai due terzi di un lato, contati dal vertice, si conduca una linea parallela ed eguale alla metà della base: o più semplicemente, se unito il vertice con la base, e contando dal vertice stesso, si prendano due terzi sulla linea d'unione. E se AVEB sia un parallelogrammo, si avrà y costante, $u = \frac{y}{2}$ e $z = \frac{x}{2}$ cioè il centro di gravità combinerà col centro stesso del poligono. Il che si verificherà egualmente di qualunque poligono simmetrico e regolare.

8.

24. Generi il piano ABVE un solido o prismatico o di rivoluzione, e si voglia il centro di gravità della superficie o del solido. Se il solido è prismatico, il centro cercato deve evidentemente trovarsi alla metà della linea descritta dal centro di gravità del perimetro o del piano AVEB. Se è di rivoluzione, sarà in qualche punto N dell'asse AB. Per determinarlo, suppongo il solito elemento Be che nella rivoluzione produrrà un cilindro del raggio y e dell'altezza infinitesima dx, il cui centro di gravità tanto relativamente alla superficie che alla massa

FIG. 8. totale, potrà supporsi in B. Immaginando dunque in n il centro di gravità del sistema, e chiamando s, s' la superficie e la massa del solido generato, avremo (21. 1°) $s : ds :: Bn : nN :: BN : Nn :: x - u : du$, $sdu + uds = xds$, ed $us = \int xds$, e nel modo stesso si troverà $us' = \int xds'$. Ma $ds =$ *superf.* $Be = 2\pi ydx$, e $ds' =$ *solid.* $Be = \pi y^2 dx$; sarà dunque $u\int ydx = \int xyds$ per il centro cercato della superficie, ed $u\int y^2 dx = \int xy^2 dx$ per il centro della solidità. Così nel cono e in tutti i solidi piramidali dell'altezza h si troverà nel modo stesso che abbiamo usato di sopra, $s = \frac{h}{2}$ ed $s' = \frac{3h}{4}$.

Leva.

25. La Leva è una verga pesante e inflessibile, omogenea o no, di dimensioni e di figura qualunque, e mobile intorno a un centro o asse d'appoggio. Quindi se in diversi punti di questa Macchina s'immaginino applicate, oltre il peso, due o più potenze comunque ineguali e variamente dirette, è visibile 1°. che *nel caso d'equilibrio, la risultante comune passerà per il centro o asse d'appoggio* (14); 2°. che *se le forze sieno o si riducano in uno stesso piano o in piani paralleli, la loro somma* (15) *e quella di tutti i loro momenti positivi e negativi* (17) *riferiti all'asse o centro d'appoggio, deve essere zero*; 3°. *e se ciascuna forza si decomponga in due* x, y *parallelamente a due piani ortogonali* X, Y (15) *la cui intersezione passi per l'asse o centro d'appoggio, le somme dei momenti delle* x *e delle* y *riferiti al centro o asse medesimo, saranno separatamente eguali a zero* (17).

26. Spesso due sole potenze r, f oltre il peso p soglion supporsi applicate alla leva: delle quali la prima è sempre una resistenza da superarsi, l'altra è la forza che si vuole impiegare per superarla.

Chiamati β, β', β'' gli angoli che le direzioni del peso e delle due potenze fanno col piano Y e perciò $90° - \beta$, $90° - \beta'$, $90° - \beta''$ quello che fanno col piano X, saranno $p \cos\beta$, $r \cos\beta'$, $f \cos\beta''$ le loro componenti parallele al primo, e $p \operatorname{sen}\beta$, $r \operatorname{sen}\beta'$, $f \operatorname{sen}\beta''$ le componenti parallele al secondo di questi piani. Onde chiamate a, b, c, a', b', c' le respettive distanze dell'une e dell'altre dal punto o asse d'appoggio

avremo per necessarie condizioni dell' equilibrio in questo caso $ap \cos\beta + br \cos\beta' + cf \cos\beta'' = 0$ ed $a'p\, sen\,\beta + b'r\, sen\,\beta' + c'f\, sen\,\beta'' = 0$, avvertendo che p deve valutarsi come una potenza applicata al centro di gravità della leva in direzion verticale (20). FIG.

27. La seconda equazione non ha luogo allorchè le forze sono situate in un piano medesimo, o qualora la leva non sia mobile che nel solo piano delle x, come suole ordinariamente accadere. Supposti questi due casi e di più che la leva sia una linea retta CC′, e le tre potenze agiscano verticalmente nel senso dei gravi e sieno applicate alle distanze $\delta, \delta', \delta''$ dal punto d' appoggio, sarà $\beta = \beta' = \beta'' = 0$, $a = \delta$, $b = \delta'$, $c = \delta''$ e la condizione d'equilibrio darà in questo caso $f\delta + r\delta' + p\delta'' = 0$ equazione che indicherà facilmente i rapporti fra f ed r secondo i diversi valori di δ δ', δ'' e le diverse situazioni del punto d' appoggio relativamente alle tre potenze f, r, p. 7.

28. Se il peso della leva sia insensibile o nullo rapporto ad r ed f o se l' appoggio cada nel di lei centro di gravità, avremo immediatamente $p\delta'' = 0$, ed $\frac{f}{r} = -\frac{\delta'}{\delta}$, d' onde si apprende 1° che *le due potenze staranno fra loro in ragione inversa delle loro distanze del punto d' appoggio e quella sarà maggiore la cui distanza dal punto d' appoggio sarà minore*: onde se fosse lecito accrescere indefinitamente δ senza render considerabile il peso della leva, non vi sarebbe resistenza alcuna che non potesse bilanciarsi col mezzo di una qualunque piccola forza; 2°. che dividendosi le leve in tre generi secondo che delle tre potenze p, f, r la prima, la seconda o la terza si trova media fra le altre due, *nelle leve del primo genere divenendo negativa* δ, *sarà sempre* f *positiva, cioè agirà nel senso stesso di* r *e potrà essere or* $>$ *ed or* $<$ *di* r*: in quelle del secondo essendo* δ' *positiva, sarà sempre* f *negativa, cioè agirà in direzione opposta ad* r, *ma sarà sempre* $>$ r; *e finalmente in quelle del terzo si avrà* δ' *positiva ed* f *negativa e* $<$ r.

29. Altrettanto si avvera se la leva sia composta di due bracci posti ad angolo retto tra loro e la direzione di una forza sia normale alla direzione dell' altra.

FIG.

Cuneo.

30. Sotto nome di Cuneo e anche di Bietta o Zeppa si riconosce comunemente una Macchina in forma di prisma triangolare, atta a separare e dividere corpi congiunti insieme da una forza assegnata. Supponendo che il triangolo ABD ne rappresenti una qualunque sezione e immaginando che una forza M applicata normalmente sul dorso DB, tenda a internarne il vertice A tra le parti del solido Q, se dai punti C', C'' di contatto si conducano le normali IC', IC'' ai lati AB, AD, e dal comune incontro I la retta IC perpendicolare a DB, e il sistema sia in equilibrio, le tre linee IC, IC', IC'' esprimeranno le direzioni della forza M, e delle resistenze R, R' che il solido Q oppone ad M nei punti C', C'' (13): e si avrà (*ivi*) $M : R : R' :: sen\, C'IC'' : sen\, C''IC : sen\, C'IC :: sen\, A : sen\, D : sen\, B :: DB : AB : AD$. Dunque $M : R + R' :: DB : AB + AD$: dal che può concludersi in generale che *la forza impressa normalmente sul dorso del cuneo, sta alla resistenza totale in ragione della lunghezza del dorso alla somma dei lati.*

9.

31. Che se la forza del cuneo si eserciti contro i due solidi Q, Q' situati nel piano XX', e mobili intorno ai due punti X, X', avremo da ciò che abbiam veduto (30) per le resistenze di Q e di Q' o per la forza esercitata normalmente dal cuneo contro le superficie IO, $I'O'$ di contatto, $R = \frac{M\, sen\, I'CD'}{sen\, A}$, $R' = \frac{M\, sen\, IBD}{sen\, A}$. Quindi se $a \times R$, $a \times R'$ sieno i momenti di queste forze rapporto ai centri X, X' (17) e $p \times Q$, $p' \times Q'$ i momenti dei pesi di ciascun solido, fatto $BID = \beta$, $CI'D' = \beta'$, avremo nel caso d' equilibrio $\frac{aM\, cos\, \beta'}{sen\, (\beta + \beta')} = pQ$, $\frac{bM\, cos\, \beta}{sen\, (\beta + \beta')} = p'Q'$, ovvero quando sia $\beta = \beta'$, cioè isoscele il cuneo, $\frac{aM}{2\, sen\, \beta} = pQ$, $\frac{bM}{2\, sen\, \beta} = p'Q'$.

10.

32. Se poi uno dei solidi Q' fosse perfettamente immobile, e l' altro si supponesse ritenuto nel piano XX' da una forza m normale alla direzione di M, decomposta M nelle due

m', m'' l' una parallela al piano XX', l' altra normale alla superficie IO, sarà nel caso d' equilibrio $m'' = R'$ ed $m = m'' \cos\beta = \frac{M \cos\beta \cos\beta'}{sen(\beta + \beta')}$, equazione che nell' ipotesi di $\beta = \beta'$ (31) diverrà $m = \frac{1}{2} M \cot\beta$. FIG.

33. Ma si abbiano i due cunei OAO', O'A'O'' in contrasto fra loro e colle masse immobili Q, Q', e animati normalmente sul dorso dalle forze M, M'. Poichè l' immobilità delle masse Q, Q' distrugge interamente l' azion dei cunei sulle medesime, dovranno nell' ipotesi d' equilibrio esser tra loro opposte le forze che i cunei esercitano l' uno contro dell' altro. Chiamati dunque δ, δ' gli angoli che le direzioni di M, M' fanno con l' asse arbitrario zz' dato di posizione, β, β', β'', β''' gli angoli delle direzioni stesse coi lati OA, O'A, O'A', O''A' e γ, γ', γ'' quelli di ciascuno dei lati coll' asse zz', si avrà (31) $\frac{M \cos\beta}{sen(\beta + \beta')} = \frac{M' \cos\beta'''}{sen(\beta'' + \beta''')}$; e quindi $\frac{M}{M'} = \frac{sen(\beta + \beta')\cos\beta'''}{sen(\beta'' + \beta''')\cos\beta}$; ovvero, poichè $\beta''' = \gamma' - \delta'$ e $\beta = \gamma - \delta$, $\frac{M}{M'} = \frac{sen(\beta + \beta')\cos(\gamma' - \delta')}{sen(\beta'' + \beta''')\cos(\gamma - \delta)}$. Che se l' asse zz' sia verticale, ed M, M' rappresentino il peso dei cunei OAO', O'A'O'', o delle loro porzioni OII'O', O'I'I''O'' impiegate nel sistema, si avrà $\delta = \delta' = 0$, $\beta = \gamma$, $\beta''' = \gamma'$ ed $\frac{M}{M'} = \frac{sen(\beta + \beta')\cos\beta'''}{sen(\beta'' + \beta''')\cos\beta}$. E se di più $\gamma = \gamma'$, e perciò $\beta = \beta'''$ sarà $\beta + \beta' = \gamma + \gamma'$, $\beta'' + \beta''' = \gamma - \gamma'$ ed $\frac{M}{M'} = \frac{sen(\gamma + \gamma')}{sen(\gamma - \gamma')} = \frac{tang\,\gamma + tang\,\gamma'}{tang\,\gamma - tang\,\gamma'}$. 11.

34. Dunque $tang\,\gamma' = \frac{M - M'}{M + M'} tang\,\gamma$ e fatto $M + M' = A$, peso totale dei cunei o delle loro porzioni impiegate, avremo $tang\,\gamma' = \frac{A - 2M'}{A} tang\,\gamma$, ovvero $A - 2M' = A \frac{tang\,\gamma'}{tang\,\gamma}$: espressione che differenziata, supposte A, γ costanti, dà $- dM = \frac{1}{2} Ad$

FIG. 11.

$(tang\,\gamma')$: $tang\,\gamma$; dal che, non attendendo al segno, può rilevarsi, che *qualora una massa OII″O″ posata sopra due solidi infinitamente resistenti, sia divisa in più parti da dei piani perpendicolari al perimetro inferiore, vi sarà equilibrio nel sistema totale, se le parti saranno proporzionali alle differenze delle tangenti degli angoli fatti dalla direzione dei piani con un asse verticale dato di posizione.*

SECONDA PARTE

Resistenza dei Solidi.

12.

35. SI concepisca il solido FH fisso immobilmente nel muro con una delle sue estremità, e che un peso p o una potenza qualunque applicata all' altra estremità, tenda a dividerlo in una qualunque sezione FQ.

Se l' azione del peso o della potenza sia perpendicolare alla sezione FQ, la resistenza che le parti di questa sezione oppongono ad esser divise, si chiama assoluta; ed è chiaro, 1°. che *questa resistenza è proporzionale al numero ed all' affinità delle parti, delle quali la sezione è composta*, 2°. che *in un solido omogeneo eguaglia il prodotto di tutti i filamenti che passano per la sezione, nella forza di uno d' essi*; 3°. che *supposta in due solidi omogenei eguale l' area della sezione, quello che più resiste sarà più denso o le sue parti avranno maggiore aderenza fra loro*; 4°. *se i due solidi sono di una medesima qualità, e l' uno pieno e l' altro cavo, essendo eguale la resistenza assoluta, le superficie effettive delle sezioni conterranno una stessa quantità di materia*; 5°. *e finalmente se i solidi sieno ambedue pieni, omogenei e della stessa materia, le resistenze assolute staranno come l' aree delle sezioni.*

36. Ma qualora la forza o peso agiscano parallelamente alla sezione FQ, la resistenza in questo caso prende il nome di relativa. Per determinarla, suppongo che tutte le resistenze assolute degli infiniti elementi che formano la sezione, agiscano col mezzo della lor risultante comune ϕ (11) nel punto C, che

perciò potrà chiamarsi centro della resistenza assoluta, e che quando il solido sia omogeneo, combinerà col centro di gravità della sezione. Dovrà la potenza o peso p vincer la forza ϕ e rimuovere il punto C, volgendolo intorno a Q. Se dunque dal punto Q, centro del moto, si conduca sulla direzione della forza la normale QH, avremo una leva angolare col punto d' appoggio in Q, e se si supponga che il solido sia in procinto di rompersi, o che le forze p, ϕ si facciano l' una con l' altra equilibrio, potrà stabilirsi la proporzione (29.25) $\phi : p :: QH : CQ$, e quindi per il momento della forza ϕ o per la resistenza relativa cercata, si otterrà $\phi \times CQ = p \times QH$.

FIG. 12.

37. Per un secondo solido avremo $\phi' \times CQ' = p' \times QH'$; dal che risulta 1°. che *se* $QH = QH'$, *cioè se le lunghezze dei bracci sono eguali, le resistenze relative staranno* :: p : p′, *ossia come i pesi massimi che l' uno e l' altro potrà sostenere senza troncarsi;* 2°. che *se i pesi sono eguali, le resistenze relative staranno come le lunghezze dei solidi;* 3°. che *se si suppongono eguali le resistenze, le forze* p, p′ *staranno come le lunghezze dei solidi; e perciò i pesi che può sostenere uno stesso solido fissato in un muro, sono in ragione inversa delle distanze dal punto d' appoggio ai luoghi a cui sono applicate.*

38. Supposti inoltre di figura prismatica ed omogenei i due solidi, e chiamate B, B′ le aree delle loro corrispondenti sezioni, si avrà $\phi : \phi' :: B : B'$ (35.5°) e $\phi \times CQ : \phi' \times CQ' :: B \times CQ : B' \times CQ'$; onde 1°. se $CQ = CQ'$ cioè se il centro di gravità delle sezioni sia ad egual distanza dal noto punto d'appoggio Q, risulterà $\phi \times CQ : \phi' \times CQ' :: B : B'$, e le resistenze relative staranno come le aree; 2°. se sono eguali l' aree, avremo $\phi \times CQ : \phi' \times CQ' :: CQ : CQ'$ cioè le resistenze relative staranno come le distanze del centro di gravità dal punto d' appoggio: onde uno stesso solido che non lascia troncarsi in una situazione, si spezzerà volgendolo in un' altra, nella quale il centro di gravità della sezione in cui si vuol dividerlo, si trovi più vicino al punto d' appoggio; 3°. il cilindro o tubo vuoto ABE la cui zona GDHABE contenga un' egual quantità di materia che il cilindro pieno NOS, sarà più resistente del cilindro NOS, giacchè il centro di gravità si troverà sempre nel primo più distante che nel secondo da qualsivoglia punto d' appoggio.

7.

FIG. 7.

39. Fin quì non abbiamo considerata la gravità o peso π del braccio QH. Che se π si unisca a p e passi per L la direzione della risultante di π (21), sarà $\phi \times CQ = \pi \times LQ$ (36) la resistenza della sezione FQ contro π, e $\phi \times CQ = p \times QH + \pi \times QL$ la resistenza totale. Onde se il solido sia prismatico ed omogeneo, nel qual caso $QL = \frac{1}{2} QH$ (24), si avrà $\phi \times CQ = \frac{QH}{2}(2p + \pi)$.

3.

40. Sia adesso il solido EG sostenuto nelle sue estremità dagli appoggi fissi G, E, e aggravato da una somma di pesi p. Se aumentato comunque p debba troncarsi il solido in FQ, sarà la resistenza in F eguale ai momenti delle porzioni p', $p - p'$ di peso che forzano i due bracci FE, FG. Ma l'effetto di p', $p - p'$ sopra la sezione FQ è visibilmente lo stesso o il solido posi sui due punti G, E, o sul solo appoggio Q corrispondente al luogo della sezione; ed in quest' ultimo caso chiamate a, x, $a - x$ le distanze che separano tra di loro e dall' appoggio Q le risultanti di p', $p - p'$, l'equilibrio dei bracci precedentemente alla rottura darebbe $p' : p - p' :: x : a - x$ (28. 1°) e $p : p' :: a : x$, e per un' altra sezione supposta costante a e variati i pesi, si avrebbe egualmente $\pi : \pi' :: a : x'$; poichè dunque $p' : \pi' :: x' : x$ (28. 1°), si avrà infine $p : \pi :: (a - x') x' : (a - x) x$, proporzione che determina i luoghi ove dovrà troncarsi il solido caricato di pesi noti, o i pesi massimi che potrà sostenere senza troncarsi in una determinata sezione.

41. Si ha parimente $px(a - x)$ momento del peso p, e $\phi \times CQ = px(a - x)$ resistenza relativa della sezione FQ. Differenziando e mandando a zero, si trova $a - 2x = 0$, e nuovamente differenziando, $-2dx = 0$. Dunque nel caso di $x = \frac{a}{2}$ si avrà nella sezione FQ la minima resistenza.

42. Si voglia infine la resistenza relativa di una verga elastica p curvata e spinta da una egual forza normale in tutti i suoi punti. Supposta m la dilatazione che la circonferenza p può soffrire prima che la verga si rompa, sarà $\frac{rm}{p}$ la dilatazione del raggio. Dunque la velocità della forza occorrente a romper la verga, sta alla velocità di quella che sarebbe necessaria

a rompere il raggio $:: p : r$. Ma la forza necessaria a rompere il raggio, esprime quella che occorrerebbe a romper la verga qualora fosse diritta; dunque altresì le due resistenze della verga curva e diritta stanno $:: p : r$, cioè come la periferia al raggio. FIG.

Ecco frattanto alcuni Problemi che potran servire nel tempo stesso e di applicazione e di estensione alle antecedenti Teorie.

I.

43. *Due prismi eguali in densità e simili in figura sporgono egualmente da un muro in cui sono impegnati con una delle loro estremità. Determinare il rapporto delle forze che applicate all' estremità opposte potrebbero troncare l' uno e l' altro nelle sezioni corrispondenti all' ultimo punto d' appoggio.*

Ris. Sieno p, p' le forze aumentate di tutto l' effetto dei pesi π, π' dei due prismi. La supposta somiglianza di questi darà (36) $B : B' :: CQ^2 : CQ'^2$, e poichè (37. 1°) $p : p' :: \phi \times CQ : \phi' \times CQ' ::$ (35. 5°) $B \times CQ : B' \times CQ'$; dunque $p : p' :: CQ^3 : CQ'^3$. Ma l' istesso raziocinio darebbe egualmente per i soli pesi $\pi : \pi' :: CQ^3 : CQ'^3$: dunque $p - \pi : p' - \pi' :: CQ^3 : CQ'^3$ ragione richiesta. 12.

II.

44. *Un prisma di dimensioni note fisso nel muro con una delle sue estremità, è atto a sostenere nell' altra un peso* p. *Determinare la lunghezza oltre la quale prolungato, cederebbe al proprio suo peso.*

Ris. Sia x ed a, b, c sieno l' altezza, larghezza e lunghezza attuale del solido. Prima del prolungamento si avrà (39) $QH = c$, $\pi = abcg$ (21), e $\phi \times CQ = \frac{c}{2}(2p + abcg)$: e dopo dovrà farsi $QH = x$, $\pi = abgx$, e $\phi \times CQ = \frac{abgx^2}{2}$. Eguagliando dunque le due espressioni risulterà $x = \sqrt{c\left(\frac{2p}{abg} + c\right)}$.

III.

45. *Per bilanciare il peso* p *applicato all' estremità della trave* QH, *è stata necessaria una resistenza* r *nella sezione* FQ; *qual resistenza* r' *potrà sostenere il peso* p' = p *diffuso uniformemente in tutta la lunghezza* QH?

Ris. Per il peso p abbiamo (36) $r = p \times QH$, e per il

FIG. peso p', la cui risultante agisce sulla metà della trave, $r' = \frac{p' \times QH}{2}$; dunque $r : r' :: 2 : 1$.

IV.

46. *Determinare la figura d' un solido che fisso nel muro in qualunque delle sue parallele sezioni, e sporgendo fuori a qualunque lunghezza, riesca ognora in egual modo resistente al momento del proprio suo peso.*

14. *Ris.* Nel prisma retto ABGHKLA che ha per base il trilineo parabolico ALH, s'immagini la sezione qualunque FDIE parallela alla faccia rettangolare e verticale ABKL. Sarà FDIE simile ad ABKL, ed avremo (23) $CQ = \frac{1}{2}$ AL, $CQ' = \frac{1}{2}$ DI, e $B : B' ::$ AL : ID atteso l'essere AB = DF. Poichè dunque $\varphi : \varphi' :: B : B'$ (35 . 5°), si avrà per la proporzione delle resistenze nelle due sezioni (36) $\varphi \times CQ : \varphi' \times CQ' :: AL^2 : DI^2$. Ma per la natura della parabola, anche i momenti dei pesi dei due solidi ABGHLKB, DFGHIEF stanno $:: BG^2 \times AL : FG^2 \times DI$, ossia $:: BC^2 : BD^2$: se dunque la resistenza della prima sezione eguaglia il momento del solido corrispondente, avverrà altrettanto rapporto a qualunque altra sezione.

V.

47. *La resistenza di un prisma triangolare equilatero, appoggiato sopra una delle sue faccie, in qual rapporto sta alla resistenza del medesimo appoggiato sul vertice dell' angolo opposto?*

Ris. Giacchè il centro di gravità del prisma è ai due terzi della normale calata dal vertice (23), la resistenza nel secondo caso sarà doppia della resistenza nel primo.

VI.

48. *Trovar la ragione delle resistenze assolute e relative di due cilindri, l' uno cavo l' altro pieno, che con egual lunghezza hanno in ogni sezione un egual quantità di materia.*

7. *Ris.* Supposti r, r', r'' i raggi del cilindro vuoto ABC, della cavità interiore FDG, e del cilindro pieno, saranno $r^2\pi$, $r'^2\pi$, $r''^2\pi$, le aree corrispondenti, ed $(r^2 - r'^2)\pi$ quella della zona ABCFDG che dovendo eguagliare $r''^2\pi$, darà $r^2 - r'^2 =$

$AD^2 = r''^2$. Dunque $r'' = AD$, ordinata tangente in A al circolo FDG; e la ragion cercata sarà di $AC : AD$ (18.3°). FIG. 7.

VII.

49. *Dato un Cilindro pieno omogeneo, determinare il raggio di un Cilindro vuoto della stessa materia che con la metà del peso sia egualmente resistente che il primo.*

Ris. Si avrà (48) $2(r^2 - r'^2)\pi = r''^2\pi$, e (38) $r\pi(r^2 - r'^2) = r''^3\pi$. Dunque $r = 2r''$, ed $r' = r''\sqrt{\frac{3}{2}}$.

VIII.

50. *Supposte due Travi di dimensioni eguali, l' una appoggiata sopra due sostegni, l' altra impegnata in un muro con una sola delle sue estremità determinare il rapporto dei pesi* p, p′ *che posson rompere l' una nel mezzo, l' altra nella sezione corrispondente all' estremo punto d' appoggio.*

Ris. Nell' ultima si ha $p = \frac{\phi \times CQ}{QH}$ (36). Nella prima immaginati i due punti d' appoggio riuniti in Q e il peso diviso in due porzioni eguali trasferite sulle due estremità, la resistenza $\phi \times CQ$ della media sezione dovrà eguagliar la somma $\frac{p' \times QH}{2}$ dei momenti eguali dei due pesi, e sarà perciò $p' = \frac{\phi \times QH}{2CQ}$. Dunque $p : p' :: 2 : 1$. 13.

IX.

51. *In qual rapporto dovrebbero stabilirsi le altezze delle Trabeazioni, Architrave, Fregio e Cornice, affinchè nei diversi Ordini d' Architettura si assicurasse a ciascuna un' egual consistenza?*

Ris. Trascurando il piccol peso dell' ornato, e supponendo presso a poco simili in ciascun Ordine le sezioni dei Cornicioni, si chiamino A, B, C, a, b, c le altezze, larghezze, e lunghezze dei medesimi in due Ordini differenti. Saranno ABC, abc le loro masse, ABCg, $abcg$ i loro pesi (21), $ABCg \times \frac{C}{2}$, $abcg \times \frac{c}{2}$ i momenti dei pesi (50) ed $AB \times \frac{A}{2}$, $ab \times \frac{a}{2}$ le resistenze nelle me-

die sezioni (35 · 39). Dunque nella proposta ipotesi dovrebbe farsi $\frac{1}{2} A^2B : \frac{1}{2} a^2b :: \frac{1}{2} ABC^2g : \frac{1}{2} abc^2g$; ovvero $A : a :: C^2 : c^2$; converrebbe cioè, che *l' altezze si proporzionassero ai quadrati delle lunghezze degli intercolonj*.

FIG. 13.

X.

52. *Si assegni nel modo stesso il rapporto delle altezze e lunghezze dei Cornicioni ai Diametri delle Colonne.*

Ris. Chiamati D, d i Diametri e mantenuti nel resto i valori dell' antecedente Problema, dovrà aversi per le regole della solidità apparente (2) $B : b :: D : d$; e poichè i pesi si possono aumentare nelle proporzioni medesime delle basi che servono a sostenerli, potrà stabilirsi l' analogia (51) $ABCg : abcg :: D : d :: BD : bd$; ossia $D : d :: AC : ac ::$ (51) $C^3 : c^3 ::$ (*ivi*) $A^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$. Dunque $A : a :: \sqrt[3]{D^2} : \sqrt[3]{d^2}$, e $C : c :: \sqrt[3]{D} : \sqrt[3]{d}$; cioè *le altezze dei Cornicioni dovranno stare come le radici cube dei Quadrati dei diametri delle Colonne, e le lunghezze come le radici cube dei diametri semplici.*

XI.

53. *Nei tre Ordini Dorico, Ionico e Corintio supposto che l' altezze delle Colonne di egual Diametro sieno 8, 9, 10 o che i Diametri delle Colonne di eguale altezza sieno* $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$; *determinare le larghezze* C, C', C'' *degli intercolonj occorrenti a dare alle trabeazioni una consistenza uniforme.*

Ris. Avremo (52) $C : C' : C'' :: \sqrt[3]{\frac{1}{8}} : \sqrt[3]{\frac{1}{9}} : \sqrt[3]{\frac{1}{10}} :: 500 : 481 : 464$ prossimamente. Dando perciò all' ordine *Ionico* quattro semidiametri e mezzo d' intercolonio, sarà $C' = 4,5$; $C = 4,698$; $C'' = 4,261$, cioè dovran darsene circa $4 \frac{2}{3}$ al *Dorico* e circa $4 \frac{1}{3}$ al *Corintio*.

XII.

54. *Nell' istessa ipotesi assegnar l' altezze* A, A', A'' *dei Cornicioni.*

Ris. Avremo (52) $A : A' : A'' :: \sqrt[3]{\frac{1}{64}} : \sqrt[3]{\frac{1}{81}} : \sqrt[3]{\frac{1}{100}} :: 250 : 231 : 215$. Se dunque si assegni col Vignola all' altezza della trabeazione *Dorica* un quarto dell' altezza della Colonna, avremo per l' ordine *Ionico* e *Corintio* $A' = 0,231$, $A'' = 0,215$ o prossimamente $A' = \frac{2}{9}$, $A'' = \frac{1}{5}$. Onde in generale *le altezze dei Cornicioni potrebbero in ciascun Ordine stabilirsi di due Diametri delle Colonne*.

FIG.

XIII.

55. *Trovare il punto* F *di minor consistenza e il momento di rottura nel tetto* AB *inclinato ad un angolo qualunque* ABC *sull' orizzontale* BC.

15.

Ris. Se AB è un prisma omogeneo sarà F sulla metà di AB (41). Quanto al momento di rottura, decomposto lo sforzo verticale $EF = dp$ del peso di una sezione qualunque $FQ = b$ del tetto, nei due $EG = dp'$ perpendicolare ad AB, ed $FG = dp''$ nella direzione di AB (6), avremo $dp' = \frac{BC}{AB} \times dp$; e $p' = \frac{BC}{AB} p = (21) \frac{BC}{AB} \times AB . bg = BC \times bg$, sarà lo sforzo totale che agisce perpendicolarmente contro di AB. Risulterà dunque per il momento cercato (50) $\frac{AB \times BC \times bg}{2}$.

XIV.

56. *Sotto lo stesso dato calcolare l' effetto* ϕ *del Cavallone o Corda* BB.

Ris. Come $dp' = \frac{BC}{AB} \times dp$ (55), così troveremo (*ivi*) $dp'' = \frac{AC}{AB} \times dp$; e $p'' = \frac{AC}{AB} \times p = \frac{AC}{AB} \times AB \times bg$ (21) $= AC \times bg$, sarà lo sforzo di tutto il tetto nel senso di AB, che decomposto in due l' uno verticale, l' altro orizzontale, darà per espressione di quest' ultimo o per l' effetto cercato del Cavallone BC, $\phi = \frac{BC}{AB} \times AC \times bg$, valore che va per altro diminuito di tutto il momento di resistenza del piè dritto BH.

FIG. XV.

57. *Sapendosi per esperienza che un filo rotondo di ferro del diametro* $2r = 1,139$ dan. *si rompe sotto un peso* $p = 550$ libb., *qual sarà la resistenza* φ *di una catena rettangolare dello stesso metallo, di un' altezza* $a = 4$ dan. *di una larghezza* $b = 3$ sol. *e curvata circolarmente nell' ipotesi che le forze dei fili crescano in ragione delle grossezze?*

Ris. La resistenza della lastra, prima di esser piegata, sarà visibilmente nell' indicata ipotesi $\frac{abp}{r^2\pi}$. Per la resistenza della medesima curvata circolarmente si avrà (42) $\varphi : \frac{abp}{r^2\pi} :: 2\pi : 1$, e quindi $\varphi = \frac{2abp}{r^2} = 488391$ libb.

Equilibrio degli Archi e delle Volte.

I.I. 58. Sia OI, I″O″ il profilo di un Arco o lo Spaccato di una Volta compreso fra le due impostature OI, I″O″ e appoggiato sui piè dritti Q, Q′, coi quali s' intendano fare un corpo stesso i cunei di rottura OIP, O″I″P″ le cui commettiture IP, I′P′ sui piè dritti, premettiamo fin d' ora che dovranno sempre considerarsi come orizzontali. Supponendo immobili ed infinitamente resistenti le masse Q, Q′ e la Volta composta di due pezzi solidi OI, I′O′, O′I′I″O″, potran questi esser riguardati come due porzioni di cuneo in contrasto fra loro e con le masse Q′, Q; e perciò la condizione del loro equilibrio e della consistenza di tutto l' Arco o Volta, sarà data dall' equazione $\frac{M}{M'} = \frac{sen(\beta + \beta')cos(\gamma' - \delta')}{sen(\beta'' + \beta''')cos(\gamma - \delta)}$ (32). E l' equazione medesima darà parimente la condizione di consistenza per l' Arco o Volta supposti divisi in tre pezzi solidi: essendo chiaro, che mentre il sistema è in riposo, uno dei due pezzi estremi può sempre riguardarsi come se formasse un tutto col piè dritto adjacente. Anzi poichè il raziocinio medesimo manifestamente si applica al caso di qualsivoglia numero di pezzi nei quali possano supporsi

divisi l' arco o la volta, così l' equazione predetta darà sempre le condizioni di rapporto fra due qualunque di questi pezzi in contrasto e contigui. FIG.

59. Generalmente soglion considerarsi gli Archi o le Volte come composti d' un' infinità di cunei infinitesimi e contigui, sciolti e indipendenti fra loro, disposti e formati in modo che la direzione delle commettiture sia sempre normale all' *Intrados* o curva interiore dell' Arco o della Volta. Sieno frattanto ABDC, CDFE due qualunque di questi cunei e condotte sull' asse ZZ′ le ordinate normali B*b*, D*d*, F*f* si faccia $Zb = x$, $Zd = x'$, $Zf = x''$, $Bb = y$, $Dd = y'$, $Ff = y''$, $ZB = s$, $BD = DF = ds$, e si chiamino r, r' i raggi osculatori dell' *Intrados* nei punti B, D; e ϕ, ϕ' le forze che premono o gravitano sugli Elementi eguali DB, DF. Avremo (32) $M = \phi ds$, $M' = \phi' ds$, $sen(\beta + \beta') = \frac{ds}{r}$, $sen(\beta'' + \beta''') = \frac{ds}{r'}$, $sen\,\gamma = \frac{dx}{ds}$, $cos\,\gamma = \frac{dy}{ds}$, $sen\,\gamma' = \frac{dx''}{ds}$ $cos\,\gamma' = \frac{dy''}{ds}$, ed $\frac{M}{M'} = \frac{\phi}{\phi'} = \frac{r}{r'} \times \frac{dy''\,cos\,\delta' + dx''\,sen\,\delta'}{dy\,cos\,\delta + dx\,sen\,\delta}$. Ma $dy'' = dy + 2ddy + d^3y$, $dx'' = dx + 2ddx + d^3x$, $cos\,\delta' = cos\,\delta + d(cos\,\delta)$, $sen\,\delta' = sen\,\delta + d(sen\,\delta)$, $r' = r + dr$, ed inoltre (supposte le forze da cui è premuta la Volta, sottoposte alle leggi di continuità) $\phi' = \phi + d\phi$; sostituendo dunque, riducendo e trascurando gli infinitesimi del terzo ordine, si avrà $\phi\,cos\,\delta\,d(2rddy + drdy) + \phi\,sen\,\delta(2rddx + drdx) + rdyd(\phi\,cos\,\delta) + rdxd(\phi\,sen\,\delta) = 0$. 16.

60. Se la Volta è in forma di *Cupola Sferoidale*, è manifesto che nella rivoluzione della curva generatrice ciascun elemento BD, DF della medesima, formerà un trapezio che avrà per altezza ds e per basi parallele gli Archi infinitesimi descritti in ciascun punto della rivoluzione dalle ordinate y, y', y''. Ora chiamato a il movimento angolare simultaneo delle tre ordinate in un' istante dt, gli Archi suddetti hanno per espressioni $y\,sen\,a$, $y'\,sen\,a$, $y''\,sen\,a$. Dunque l' area dei trapezj sarà $\frac{1}{2}ds(y + y')\,sen\,a$, $\frac{1}{2}ds(y' + y'')\,sen\,a$; e per la forza premente sopra i medesimi, avremo $M = \frac{1}{2}sen\,a\,\phi ds(y + y')$, $M' = \frac{1}{2}sen\,a\,\phi' ds$

FIG. $(y' + y'')$; ed $\frac{M}{M'} = \frac{\phi(y + y')}{\phi'(y' + y'')}$. Introdotta pertanto questa piccola varietà nella precedente equazione (50) ed osservando di più che $y' = y + dy$, $y'' = y + 2dy + d^2y$, otterremo infine $\phi y \cos\delta (2rddy + drdy) + \phi y \, sen\, \delta (2rddx + drdx) + rdyd(\phi y \cos\delta) + rdxd(\phi y \, sen\, \delta) = 0$.

61. Queste generali equazioni sono il fondamento e la base della soluzione di quasi tutti i Problemi che posson proporsi sull' Equilibrio degli Archi e delle Volte. Vediamo come possano semplicizzarsi qualora sia nota una qualche legge di ϕ, ed applichiamole in seguito a qualche ricerca utile e pratica.

16. Suppongasi in primo luogo che ϕ operi verticalmente, e in direzione parallela all' asse arbitrario ZZ'. Si avrà dunque (33) $\delta = 0$ e perciò $sen\,\delta = 0$, $\cos\delta = 1$. Sostituiti questi valori, le due precedenti equazioni diverranno 1°. $\phi(2rddy + dydr) + rdyd\phi = 0$; ovvero moltiplicando per dy ed integrando, $r\phi dy^2 =$ ad una *funzione costante* di $ds^2 = Ads^2$; ovvero (giacchè ds costante dà $r = -\frac{dsdx}{ddy}$) $-\frac{\phi dy^2 dx}{ddy} = Ads$, e finalmente $Ads \int -\frac{dy^2}{ddy} = \frac{Ads}{dy} = \int \phi dx + Cost$ 2°. $\phi y (2rddy + drdy) + rdyd(\phi y) = 0$ e moltiplicando per dy ed integrando, $r\phi y dy^2 = Ads^2$, ossia $-\frac{\phi y dy^2 dx}{ddy} = Ads$.

62. Si supponga in secondo luogo, che nella prima equazione oltre ad esser ϕ verticale, sia di più proporzionale ad una *funzione* X dell' ascissa x. Potrà dunque farsi $\phi = X$, e avremo come nel num°. antecedente $X(2rddy + dydr) + rdydX = 0$. Moltiplicando per dx ed integrando si ottiene $r\phi dy^2 =$ ad una *Funzione della Costante* $ds^2 = Ads^2$. Ma ds costante dà in ogni curva $r = -\frac{dsdx}{ddy}$; sostituendo dunque ed integrando, risulterà $\frac{Ads}{dy} = \frac{A\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} = \int Xdx + B$, e quindi $y = \ldots\ldots\ldots$

$$\int \frac{Adx}{\sqrt{((\int Xdx + B)^2 - A^2)}} + Cost.$$

63. Sia in terzo luogo nell' equazione medesima ϕ propor-

zionale ad una *funzione* X di x: e se ne supponga normale all' *Intrados* la direzione. Si avrà $\varphi = X$, $\cos\delta = \frac{dy}{ds}$, $sen\,\delta = \frac{dx}{ds}$. e conseguentemente (59) $3rX(dyddy + dxddx) + (dx^2 + dy^2)(Xdr + rdX) = 0$. Ma ds costante dà $dyddy + dxddx = 0$; dunque $Xdr + rdX = d(rX) = 0$, e integrando $rX =$ ad una *Costante* $= A$. Sostituito il valor di r (61) risulta $-\frac{dsXdx}{ddy} = A$; dunque riducendo, nuovamente integrando e introducendo la costante B, avremo $\int Xdx = B - \frac{Ady}{ds} = B - \frac{Ady}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ e finalmente $dy = \frac{(B - \int Xdx)\,dx}{\sqrt{(A^2 - (B - \int Xdx)^2)}}$. Eccoci alle applicazioni.

I.

64. *Determinare la figura da darsi ad un Arco di Volta a botte composto di cunei tutti eguali ed egualmente pesanti, che debba sostenersi senza rinfianco.*

Ris. Sarà φ verticale e costante. Sarà dunque (61.62) $\int\varphi dx = \varphi x$ e fatto $\frac{A}{\varphi} = A$, avremo $\frac{Ads}{dy} = \frac{A\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} = X + Cost$, e quindi $dy = \frac{Adx}{\sqrt{((X + Cost)^2 - A^2)}}$ equazione alla *Catenaria*, che sarà perciò la curva cercata.

II.

65. *Soddisfare alla stessa ricerca per una Cupola Sferoidale.*

Ris. Sarà come nell' antecedente Problema φ verticale e costante. Dunque fatto $\frac{A}{\varphi} = A$, potremo stabilire (61. 2ª) $Ad\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{ydxdy^2}{ds^2} = 0$. Per integrare, suppongo dy costante e ds variabile ed eguale zdy. Avremo $Adz + ydx = 0 = Adz + y\sqrt{(ds^2 - dy^2)} = Adz - ydy\sqrt{(z^2 - 1)}$: e quindi $ydy = \frac{Adz}{\sqrt{(z^2 - 1)}}$. Si faccia adesso $z = \frac{\omega^2 + 1}{2\omega}$, sarà $ydy = \frac{Ad\omega}{\omega}$; ed $\frac{y^2}{2} = A(L\omega + L\,Cost)$: e finalmente restituendo il valor di ω e fa-

FIG. cendo $Cost = B$, avremo $y^2 = 2ALB\,(z + \sqrt{(z^2 - 1)})$ equazione alla curva cercata.

III.

66. Stabilire la Figura della Volta nell' ipotesi che il peso o la pressione dei cunei cresca in ragione della loro profondità sotto la Chiave.

Ris. Sarà $\varphi = X = x$ (62) ed $y = \int \frac{A\,dx}{\sqrt{((\frac{1}{2}x^2 + B)^2 - A^2)}}$.

17. Ma se si voglia evitare la nojosa integrazione, si faccia $LgflAL = A$ profilo di una porzione della volta cercata, corrispondente alla doppia ordinata Mm che si suppone orizzontale, parallela a gf e divisa in mezzo in P dall' asse AB. Fatte $PM = y$, $AG = x$ e chiamati M' i due cunei fml, gML, sarà $\frac{dx}{dy}(h + x)^2$ la somma dei triangoli ghM, Kfm, e per un Teorema di Simpson *superf.* $hMAmK = \frac{2}{3}(3h + x)y$. Poichè dunque superficie $gMAmf = A - 2M'$ (34) $= \frac{A\,tang\,\gamma'}{tang\,\gamma} = \frac{A\,dx}{dy\,tang\,\gamma}$ (32), si avrà $\frac{A\,dx}{dy\,tang\,\gamma} = \frac{2}{3}y(3h + y) + \frac{dx}{dy}(h + x)^2$; e integrando e determinando la costante con osservare che $X = 0$ dà $y = 0$, si avrà finalmente $y^2 = (\frac{3A}{tang\,\gamma} - 12h^2)\,L\,(\frac{3h + x}{3h}) - \frac{3}{2}x^2 + 3hx$. Quanto ad A, qualora sian note x, y all' origine della volta, ne somministra il valore la stessa equazione. Eccone un esempio nel seguente Problema.

IV.

67. L' arco di un Ponte ha una lunghezza di B^a. 18. ed un' altezza di B^a. 5. Mezzo braccio al di sopra della Chiave passa una strada perfettamente in livello. Supponendo che in ciascuno strato sia stata impiegata una materia perfettamente omogenea, indagare la figura dell' arco.

Ris. Si farà $x = 5$, $y = 9$, $h = \frac{1}{2}$ e avremo $A = (\frac{37}{L13 - L3} + 1)\,tang\,\gamma = 59{,}101 \times tang\,\gamma$. Dunque $y^2 =$

$173, 303 \times L \frac{3+2x}{3} - \frac{3}{2} x (x - 1)$ equazione alla curva richiesta.

V.

68. *In un Arco di forma Ellittica esprimer la legge delle forze che debbon premerne i cunei.*

Ris. Supposti 1 e b i due semiassi dell' ellisse, e la volta aggravata unicamente dal peso delle sue parti, avremo per la natura della curva $y^2 = b^2 (2x - x^2)$, e quindi $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{b^2 (b^2 - y^2)} = ds^2 - dy^2$; $\frac{1}{dy} = \frac{1}{bds} \sqrt{(\frac{y^2}{b^2 - y^2} + b^2)}$; $-\frac{ddy}{dy^2} = \frac{b^2 dx}{ds (b^2 - y^2) \sqrt{(y^2 + b^2 (b^2 - y^2))}}$, e $\phi = (61.1^a.) - \frac{Adsddy}{dxdy^2} = \frac{Ab^2}{(b^2 - y^2) \sqrt{(y^2 + b^2 (b^2 - y^2))}}$. La costante A si determina supponendo che per la chiave ove $x = y = 0$, sia $\phi = m$.

VI.

69. *Si esprima la legge medesima per un Arco circolare.*

Ris. Si farà $b = 1$, e si avrà $\phi = \frac{A}{1 - y^2}$ (68).

VII.

70. *La stessa espressione si assegni per un Arco cicloidale.*

Ris. La qualità della curva dà $dy^2 = \frac{dx^2}{x} (2a - x) = ds^2 - dx^2$. Dunque $dx^2 = \frac{xds^2}{2a}$; $dy = ds \sqrt{\frac{2a - x}{2a}}$ e $\phi = (61.1^a.) - \frac{Adsddy}{dxdy^2} = \frac{A}{2\sqrt{2a (2a - x)^3}}$. La costante si determina come sopra (68).

VIII.

71. *Si applichi infine la stessa ricerca ad un Arco formato coll' incontro di due parabole eguali che posino col vertice e coi loro assi sopra una medesima orizzontale.*

Ris. Avremo per la natura della parabola $x^2 = py$; $p^2 dy^2 = 4x^2 dx^2 = (ds^2 - dx^2) p^2$, $dx = \frac{p^2 ds^2}{4x^2 + p^2}$; $dy = \frac{2xds}{\sqrt{(4x^2 + p^2)}}$; e

$$\varphi = (61.1^a.) - \frac{Adsddy}{dxdy^2} = \frac{-Ap^2}{x^2\sqrt{(4x^2+p^2)}}.$$

IX.

72. *In un Arco ellittico o circolare qual è il punto più debole e che richiede il minimo carico?*

Ris. Differenziando le due espressioni di φ avute ai numeri 68., 69., si trova $y=0$. Dunque il cercato punto più debole è alla chiave.

X.

73. *Nell' Arco Ellittico determinare il rapporto tra il carico della chiave, quello del punto corrispondente alla metà dell' altezza e lo sforzo dei piè dritti all' impostatura.*

Ris. Per la chiave ove $x=0$, $y=0$ si ha (68) $\varphi = \frac{A}{b^2}$. Alla metà dell' altezza ove $x=\frac{1}{2}$ ed $y^2=\frac{3b^2}{4}$, si ha $\varphi = \frac{8A}{b^2\sqrt{(b^2+3)}}$. E all' impostatura ove $y=b$, si ha $\varphi = \frac{Ab^2}{0} = \infty$. Di quì il rapporto cercato.

XI.

74. *Si supponga l' Arco a tutto sesto o circolare e si risolva il quesito medesimo.*

Ris. Sarà $b=1$, e quindi il richiesto rapporto :: A : 4A : ∞.

XI

75. *Il punto medio fra l' impostatura e la chiave di un arco a tutto sesto, quanto deve esser caricato più della chiave?*

Ris. Alla Chiave abbiamo $y=0$ e $\varphi = A$ (69). Al mezzo tra l' impostatura e l' Arco, abbiamo $y=\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $\varphi = 2A$ (*ivi*). Il carico dunque sul mezzo deve esser doppio che sulla Chiave.

XIII.

76. *La resistenza del Poplite d' un arco Gotico a sesto acuto, in che rapporto sta alla resistenza della Chiave di un Arco Romano descritto col medesimo raggio?*

Ris. Per l' Arco Romano alla Chiave abbiamo $\varphi = A$

(75) e per l' Arco Gotico al Poplite, $y = \frac{1}{2}$ e $\phi = \frac{4A}{3}$ (69). Sta dunque la resistenza di quello alla resistenza di questo :: 3 : 4.

XIV.

77. *Si assegni lo stesso rapporto per la resistenza al mezzo dei fianchi.*

Ris. Al mezzo dell' Arco Gotico abbiamo $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $\phi = 4A$ (69). Al mezzo dell' Arco Romano abbiamo $\phi = 2a$ (75). Dunque la resistenza del primo è in questo caso doppia di quella del secondo.

XV.

78. *In una Cupola voltata ad Arco Parabolico retto, determinare il peso della Lanterna.*

Ris. Avremo per la qualità della curva $y^2 = px$, $dy = \frac{pdx}{2y} = \frac{p}{2y}\sqrt{(ds^2 - dy^2)} = \frac{pds}{\sqrt{(4y^2 + p^2)}}$; $-\frac{ddy}{dy^2} = \frac{2dx}{ds\sqrt{(4y^2 + p^2)}}$ e $\phi =$ (61 . 2°.) $-\frac{Adsddy}{ydy^2dx} = \frac{2A}{y\sqrt{(4y^2 + p^2)}} = \frac{2A}{p\sqrt{x(4x + p)}}$, ove x, y son le coordinate alla sezione sulla quale corrisponde la base della Lanterna. Ed è perciò manifesto che *la Lanterna dovrà esser tanto più pesante, quanto la sua base sarà più prossima al vertice della Cupola: e senza di essa la Cupola non potrebbe sostenersi qualora non si desse alla Chiave un peso infinito.*

79. Convien per altro avvertire che tanto in questo, quanto nei risultati delle precedenti applicazioni, la forza del cemento e la durezza e la tenacità dei materiali, onde i cunei sono ordinariamente composti, alterano notabilmente i valori ottenuti, e posson dar luogo a delle costruzioni bastantemente stabili, benchè eseguite contro le leggi quì ritrovate. E' bensì vero che essendoci noi partiti dall' ipotesi più svantaggiosa qual' è quella di cunei infinitesimi, affatto sciolti e indipendenti fra loro (59), le Teorìe che ne abbiamo dedotte si renderanno sempre maggiormente sicure in qualunque altra ipotesi pratica: nè giammai potrà darsi il caso che un Edifizio regolato secondo gli esposti principj, possa vedersi perire per vizio di costruzione.

FIG.

Spinta degli Archi e delle Volte contro i Piè dritti.

10\. 80. Se i Piè dritti Q', Q (58) non sieno infinitamente resistenti, l' effetto dell' Arco o Volta contro i medesimi sarà quello del cuneo CAB animato sul dorso da una forza verticale pari al peso M della Volta o dell' Arco; e potrà o rovesciarli intorno ai punti X, X' delle basi, oppure intorno a qualcho punto N, N' dell' altezza, o spingerli orizzontalmente sulle basi stesse o sopra qualche strato parallelo alle basi. Onde se β sia l' angolo che le due commettiture $OI, O''I''$ inclinate egualmente sull' orizzonte e normali all' *Intrados* $II'I''$, fanno con l' asse verticale ZZ'; ed aR, aR' sieno i momenti dell' azione di M contro i Piè dritti, $pQ, p'Q'$ sieno quelli delle resistenze dei Piè dritti medesimi, ed m, m' le loro resistenze orizzontali, dovrà aversi per evitare il primo inconveniente (31) $\frac{aM}{2\, sen\, \beta} = pQ$, $\frac{bM}{2\, sen\, \beta} = p'Q'$, e per evitare il secondo $m = m' = \frac{1}{2} M \cot \beta$ (32).

11\.

18\. 81. Ma si voglia la curva XNLO che dar si deve alla faccia esterna del Piè dritto, affinchè in ciascun punto N della sua altezza resista alla forza che tenderebbe a romperlo nello strato o sezione corrispondente NP e rovesciarlo. Supponendo data la faccia interna IAD e che questa sia curva nella parte AI, e dritta e verticale nel resto AD, dal punto medio G della commettitura OI calo GH parallela ad AD, e preso Df per asse della curva richiesta, faccio $fP = x$, $NP = y$, la costante $PK = a$ e la gravità universale $= g$. Quindi rappresentando con GE lo sforzo di $OII'O'$ perpendicolarmente ad OI e decomponendo GE nelle due Gf, Gq (6. 3°.) l' una orizzontale, l' altra verticale, se si chiamino μ, μ', μ'', μ''' i momenti rapporto ad N delle forze Gf, Gg del peso della Massa fPN supposta omogenea, e della di lei resistenza relativa nella sezione NP, sarà primieramente $Gf = \frac{1}{2} M \cot \beta$ (32), $Gq = \frac{M}{2}$ (*ivi*) e $\mu = \frac{1}{2} Mx \cot \beta$, $\mu' = \frac{1}{2} M(a + y)$ (17). Inoltre sarà $\frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}$ (23. 1°.) la distanza del centro di gravità della Massa fPN dall' asse fD. Dunque

la direzione del peso della massa stessa passerà per NP ad una distanza $y - \frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}$ da N: onde poichè $\int y dx$ è l' espressione della massa, e $g\int y dx$ quella del peso (21), avremo (17) $\mu'' = gy\int y dx - \frac{1}{2} g\int y^2 dx$. E infine chiamata ϕ la resistenza assoluta della sezione NP, dovremo avere (36) $\mu''' = \frac{\phi y}{2} \times y = \frac{\phi y^2}{2}$. Ma la forza Gf tende a rompere e rovesciare il Piè dritto, mentre le altre tre tendono a stabilirlo; dunque, non curando il peso della porzione GOfA vantaggioso esso pure alla stabilità del sistema, potremo supporre per necessaria condizion d' equilibrio $-\mu + \mu' + \mu'' + \mu''' = 0$ (17) il che darà $M(-x \cot\beta + a + y) + 2gy\int y dx - g\int y^2 dx + \phi y^2 = 0$, equazione alla curva richiesta.

FIG. 18.

82. Se il Piè dritto deve esser prismatico, l' equazione ottenuta si cangerà nella quadratica $M(-x \cot\beta + a + y) + (gx + \phi) y^2 = 0$, e facendo x eguale all' altezza totale HG, si avrà per y la larghezza della base e in conseguenza quella di qualunque altra sezione. Ma se il Piè dritto debba essere a scarpa, se ne fisserà con la stessa equazione la base; e quanto alla pendenza, si stabilirà con determinare mediante la prima equazione l' angolo che farebbe con l' ordinata HX la tangente condotta al punto infimo X della solita curva XNL (81).

83. Si cangi l' Arco o Volta in una Cupola e si voglia la grossezza dei Piè dritti nell' ipotesi che debban questi esser prismatici o verticali. Immagino il segmento ABCcab chiuso dai due Archi interni BC, bC e dai due esterni Ac, ac che uniti ai vertici C, c interno ed esterno, scendono sui lati Bp, bt del Piè dritto PRpb facendo in C, c due angoli eguali ed infinitesimi ω. Se la Cupola minacci di rompersi in OI, ed OI sia normale all' *Intrados* BCb e faccia un angolo β con la verticale CS, chiamata M la massa superiore OICc del segmento, e rappresentando con GE la spinta della medesima perpendicolarmente ad IO, potrà GE come sopra (81) decomporsi nelle due Gf, Gq, e i momenti μ di Gf, μ' di Gq, μ'' del Piè dritto PRpb e μ''' della massa ABGab riferiti al punto F o all' asse PT, nell' ipotesi d' Equilibrio, dovranno insieme annullarsi. Ora se si faccia BL =

FIG. 19.

FIG. 19. a, $AB = b$, $GV = c$, $VH = d$, $BV = l$, $Ms = Mr = y$, $SF = z$, si avrà in primo luogo come al num°. 82., $\mu = \frac{1}{2}\,\omega M\,(c + d)$ $\cot\beta$, $\mu' = \frac{1}{2}\,\omega M\,(l + z)$. Quanto poi a μ'', descritti col centro in M e coi raggi y, $y + dy$ i due archi oq, rs infinitesimi ed infinitamente vicini nel piano orizzontale nMN terminato sui lati Pp, Tt del Piè dritto, potrà il trapezio $orqs$ venir riguardato come l' elemento della sezione orizzontale $\beta\delta nN$. E poichè atteso l' esser necessariamente $= \omega$ l' angolo nMN, abbiamo *superf.* $orqs = \omega y dy$, e condotta dal mezzo u di $orqs$ la verticale uv, si ha $Fv = y - z + a$, sarà dunque $\omega y dy\,(y - z + a)$ il momento della superficie $orqs$, e integrando si avrà per il momento dell' area $oq\beta\delta$ l' espressione $\frac{\omega(a + z)y^2}{2} - \frac{\omega y^3}{3} + Cost.$ Ma fatto $y = a$, svanisce l' area $oq\beta\delta$, e fatte $y = a + z$, l' area stessa si cangia nella sezione $\beta\delta Nn$; si avrà dunque primieramente $Cost. = \frac{\omega a^3}{3} - \frac{\omega a^2}{2}\,(a + z)$, e in secondo luogo $\omega\left(\frac{(a + z)^3}{6} - \frac{a^2 z}{2} - \frac{a^3}{6}\right)$ momento della sezione $\beta\delta nN$, e quindi per il momento di tutta la Massa $PRpb$ composta di tante sezioni eguali fra loro e a $\beta\delta nN$ quanti son punti nell' altezza $Pp = d$, si avrà $\mu'' = \omega d\left(\frac{(a + z)^3}{6} - \frac{a^2 z}{2} - \frac{a^3}{6}\right)$. E infine quanto a μ''' osservo che in luogo della massa $ABGab$ può lecitamente sostituirsi la massa prismatica e verticale $Bai\Delta$ eguale all' altra e nell' altezza e nella base; giacchè la risultante del peso (21) essendo in questa più prossima ad F, che in quella, ne sarà anche minore il momento di resistenza (17): onde la larghezza cercata del Piè dritto risulterà dopo questa sostituzione o maggiore o non mai minore del giusto, e niente si perderà rapporto alla sicurezza dell' Edifizio. In tal' ipotesi calcolando μ''' nel modo stesso che μ'', troveremo facilmente $\mu''' = \omega c\left(\frac{2abz + b^2 z - ab^2}{2} - \frac{b^3}{3}\right)$. E quindi riuniti insieme coi loro segni i valori trovati dei quattro momenti, ed eguagliatane la

somma a zero (25 . 3°.), avremo $z^3 + 3az^2 + \frac{3z}{d}$ ($2ab + b^2 +$ FIG.
M) $+ \frac{1}{d}$ ($3Ml - cb^2 (3a + 2b) - 3M (c + d) \cot \beta$) $= 0$, equazione del terzo grado che risoluta darà la larghezza z del Piè dritto.

84. Ordinariamente sogliono le Cupole munirsi di un Attico, che costruito in forma di prisma retto e frapposto fra la Volta e il Piè dritto ne impedisce sempre più col suo peso il rovesciamento, e contribuisce alla di lui maggiore stabilità. Dando frattanto all' Attico un' altezza nota h, ed una larghezza eguale a quella del Piè dritto, per avere in questo caso l' equilibrio di tutto il sistema, basterà sostituire $h + d$ in luogo di d nella formula precedente. E se oltre all' Attico abbia la Cupola una Lanterna del peso p, ciò che nella formula viene espresso da M, sarà nel nuovo supposto espresso evidentemente da $M + p$. In conseguenza l' equazione per una Cupola nella quale si combinino insieme l' Attico e la Lanterna, sarà $z^3 + 3az^2 + \frac{3z}{h+d} (2ab + b^2 + M + p) + \frac{1}{h+d} (3l(M+p) - cb^2 (3a + 2b) - 3(M+p)(c + h + d) \cot \beta) = 0$.

85. Le quantità c, l esigono per esser determinate che si conosca il luogo delle linee di rottura OI, O′I′. Or l' esperienza dimostra che il punto ove le Cupole sogliono d' ordinario fendersi, è nell' intersezione della curva con la diagonale LΛ del rettangolo BLCΛ. Dunque se si faccia CL $= \lambda$, avremo $\lambda : a :: c : l$, rapporto che combinato con l' equazione alla curva, farà conoscere i valori di c, l. Riguardo poi al valor di M può facilmente trovarsi calcolando la solidità dello spazio Oc′O′O e sottraendone quella dello spazio ICI′I. Illustriamo con qualche esempio queste Teorìe. 19.

I.

86. *Supposto M un qualunque carico che graviti sopra la Chiave, determinare il rapporto ϕ delle spinte in qualsivoglia punto di un Arco uniforme a tutto sesto, posato sopra i Pilastri immobili e considerato come non grave.*

Ris. Svaniranno per le condizioni del Problema i momenti μ'', μ''' (81) e la costante a (*ivi*). Avremo dunque $\phi = \mu -$

FIG. $\mu' = \frac{1}{2} M (x \cot \beta - y)$. E poichè $\cot \beta = \frac{x}{1-y}$ (80) e per la natura del Circolo $x = \sqrt{(2y - y^2)}$, sarà $\varphi = \frac{My}{2(1-y)}$.

II.

87. *Ammessa l' istessa ipotesi astraendo egualmente dal peso dell' Arco, calcolar le spinte φ, φ', φ'' alla cima, all' imposta ed ai 60° sopra l' imposta.*

Ris. Fatto successivamente $y = 1, = 0, = \frac{1}{2}$, si avrà (87) $\varphi = \infty$, $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \frac{1}{2} M$.

III.

88. *Con gli stessi dati si stabilisca il rapporto delle spinte alla metà degli Archi a sesto intero e acuto di larghezze eguali.*

Ris. Per l' Arco a tutto sesto si avrà $y = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$, e $\varphi = \frac{1}{2} M (1 - \sqrt{2})$ (87). Nell' arco a sesto acuto sarà $\cot \beta = \frac{x}{2-y}$ (80), $x = \sqrt{(4y - y^2)}$: ed alla metà dovrà farsi $y = 2 - \sqrt{3}$. Avremo dunque $\varphi' = \frac{M(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$, e perciò $\varphi : \varphi' :: 207 : 155 :: 3 : 2$.

IV.

89. *Si voglia il peso M e l' altezza dei punti di rottura in una Cupola circolare.*

19. *Ris.* Sieno r, r' i raggi dell' *Intrados* e dell' *Estrados* o curva esteriore, e $cc' = x'$, $Cc = x$. Sarà *solid.* OcO'O $= \pi x'^2 (r' - \frac{x'}{3})$, e *solid.* ICI'I $= \pi x^2 (r - \frac{x}{3})$. Avremo inoltre (85) $\lambda = r$, $a = r'$, $c = r - l$, ossia $r - x = y = \sqrt{(2rx - x^2)}$, e quindi $x = r(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$, $y = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, come pure $x' = r'(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$, $y' = r'\sqrt{\frac{1}{2}}$; dopo di che, facile è il calcolo del peso M.

V.

FIG. 19.

90. *Sia la Cupola una Paraboloide retta, e si cerchino gli stessi Elementi.*

Ris. Supposti p', p i parametri delle superficie esteriore e interiore, sarà la differenza dei due solidi (86) $p'x'^2 - px^2$: Si troverà inoltre (82) $\cot\beta = \frac{\sqrt{px}}{2x}$, $x = \frac{c}{2}(3 - \sqrt{5})$, $l = a - \sqrt{px}$.

VI.

91. *Nell' istessa Cupola abbiamo* LC = 55,424, QB = 44, AB = 3, Cc = 1,5, *l' altezza dell' Attico* (84) = 20, *il peso della Lanterna corrispondente a quello di un cilindro della materia medesima e del diametro* 15 *e altezza* 10. *Si cerchi la grossezza z del Piè dritto.*

Ris. Calcolando la formula del num°. 84, si troverà con Bossut sul fine della Memoria Prima sopra le Volte (4) $z = 3,58$.

Degli Edifizi destinati a reggere un fluido.

20.

92. Se la Volta ACB sia destinata a sostenere un fluido della gravità specifica γ fino all' altezza CD = a sopra la Chiave, ciascun Elemento N della medesima sarà insieme aggravato e dal particolare suo peso a dalla pressione del fluido, cioè da due distinte forze $Nf = p$, $Nl = \gamma(x + a)$, l' una verticale, l' altra normale all' Elemento e proporzionale alla profondità NE dello stesso, sotto la superficie o livello del fluido.

Compito frattanto il parallelogrammo Nh e condotte le ordinate NP, np infinitamente vicine ed hq normale al prolungamento di Nf, la diagonale Nh esprimerà la forza che in addietro (59) abbiamo chiamata ϕ (6. 3°); e poichè atteso l' esser retto l' angolo in N di Nl con la curva, abbiamo $\mathrm{sen}\, qfh = \mathrm{sen}\, o\mathrm{N}n = \frac{dx}{ds}$, e $\mathrm{sen}\, fhq = \cos o\mathrm{N}n = \frac{dy}{ds}$, i due triangoli rettangoli fqh, Nqh nei quali l' angolo $h\mathrm{N}q = \delta$ (33), daranno $\phi\, \mathrm{sen}\, \delta = hq = \frac{\gamma(x+a)dx}{ds}$, $\phi \cos\delta = \mathrm{N}q = p + \frac{\gamma(x+a)dy}{ds}$,

FIG. valori che sostituiti nella formula generale del num°. 59. la cangeranno dopo le debite riduzioni, in $2rpddy + pdrdy + rdydp + \gamma rdsdx + \gamma (x + a) drds = 0$, che trattata alla maniera dei numⁱ. 61 . 62, si risolve per ultimo nell' altra $dy = \ldots\ldots$

$$\frac{(2B - \gamma x(x + 2a))dx}{\sqrt{((2\int pdx + 2A)^2 - (2B - \gamma x(x + 2a))^2)}},$$ equazione alla curva che deve darsi ad una Volta destinata a reggere un fluido.

93. Che se il fluido si sostenga sopra di un fondo già stabile per se medesimo e si cerchi con quali regole debban costruirsi le pareti o sponde necessarie per contenerlo, avvertiremo che la pressione del fluido contro di esse agisce nel modo stesso della spinta delle Volte contro i Piè dritti (80) e tende
22. o a rovesciarle intorno al punto A della base, o intorno a qualche altro punto dell' altezza, ovvero a muoverle sulle basi o sopra qualche strato parallelo alle basi: mentre dall' altro canto il peso delle pareti e la tenacità ed adesione dei diversi strati di cui son composte, tendono a produrre l' effetto contrario. Quindi per ovviare al primo disordine converrà regolare in modo le azioni delle due ultime forze, che i loro momenti riferiti al punto A (17) eguaglino il momento della pressione del fluido riferito al punto medesimo (25 . 3°). Anzi siccome la pressione del fluido agisce normalmente a ciascuno Elemento della sponda o parete premuta (92), se si decomponga in due, l' una orizzontale, l' altra verticale, è evidente, che la prima sola tenderà a rovesciare la parete o la sponda, mentre l' altra concorrerà insieme col peso e coll' adesione degli strati a stabilirle nella lor situazione: onde per l' equilibrio basterà, che il momento della prima si faccia eguale alla somma del momento della seconda con quelli delle due altre forze accennate. Ora se ABCED rappresenti la sponda, ed S sia un suo punto qualunque situato alla profondità ER sotto il livello EI, fatto $ER = z$, $RS = FT = y$, $AD = q$, $EF = f$, $FD = g$, le regole dell' Idrostatica danno per il momento della spinta verticale del fluido rapporto al punto A, $\gamma\int(q + y - g)zdy$, e per quello della spinta orizzontale $\frac{1}{6}\gamma f^3$. Chiamato dunque aQ il momento del peso della sponda (30), e φ la forza d' adesione dello strato AD allo strato inferiore, o la resistenza relativa del solido nella

sezione AD (36), avremo per evitare il rovesciamento della sponda intorno ad A, l' equazione $\frac{1}{6}\gamma f^3 - \gamma\int(q + y - g)zdy - aQ - \phi = 0$.

FIG.

94. Quanto poi ad impedirne lo stacco e il movimento sopra le basi, se ad oggetto di render sempre più vantaggiose le cercate dimensioni, vogliasi trascurare l' effetto della pressione verticale del fluido e della forza ϕ (93), potremo per determinar l' equilibrio, limitarci a stabilir semplicemente un' equazione fra la spinta orizzontale e la resistenza che oppone alla medesima il peso della sponda o della parete. Ora come chiamata P l' area del profilo della parete o della sponda, può questa resistenza supporsi in generale nP, e la spinta orizzontale del fluido secondo i Canoni d' Idrostatica, ha per espressione $\frac{1}{2}\gamma f^2$, dovremo dunque per riparare a questo secondo disordine, stabilir l' equazione $\frac{1}{2}\gamma f^2 = nP$. Ma rapporto a tutte queste dottrine ecco quattro utili ricerche.

I.

95. *Una Volta di egual grossezza in ogni sua parte e senza carico o rinfianchi deve reggere un fluido ad un' altezza* h *sopra la chiave; se ne determini la figura.*

Ris. Sarà costante p (92), ed avremo perciò (*ivi*) $dy = \frac{(2B - \gamma x(x + 2a))dx}{\sqrt{4(px + A)^2 - (2B - \gamma x(x + a)^2)}}$.

II.

96. *Il profilo o spaccato* ABCD *di una Diga è un trapezio i cui lati* BC *ed* AD *sono orizzontali. Se ne determinino le dimensioni occorrenti, onde la Diga non venga rovesciata sul punto* A *della base.*

21.

Ris. Condotte le verticali CH, BG, si faccia CH $= h$, HD $= b$, AG $= b'$; si avrà per la natura del trapezio, $y = \frac{gz}{f}$ e quindi $\gamma\int(q + y - g)zdy = \frac{g\gamma z^2}{f}\left(\frac{q}{2} + \frac{gz}{3f} - \frac{g}{2}\right)$; integrale che fatto $z = f$, diviene $\frac{1}{2}g\gamma f\left(q - \frac{1}{3}g\right)$. Si avrà inol-

tre $aQ = (93)\ \frac{1}{2}hq^2 - \frac{1}{2}hbq + \frac{1}{6}hb^2 - \frac{1}{6}hb'^2$, valori che sostituiti nell' equazione del num°. 93 danno le dimensioni cercate.

III.

97. *Nella Diga stessa determinar le dimensioni adattate ad impedirne lo stacco e il movimento orizzontale sulle basi o sugli strati paralleli alle basi.*

Ris. Supposta Γ la gravità specifica della materia di cui è composta la Diga, si avrà $(94)\ P = \frac{1}{\Gamma}\left(hq - \frac{h}{2}(b + b')\right)$. Di quì e dall' equazione del num°. 94, si deduca il valor di q.

IV.

98. *Supponendo le faccie della Diga perfettamente verticali, determinare le dimensioni per il primo dei due casi proposti.*

Ris. Si avrà $g = 0$, $b = 0$ (96). Se dunque per maggior sicurezza si trascuri ϕ (93), si avrà $q = \sqrt{\frac{\gamma f^3}{3\Gamma h}}$ (93. 96).

Degli Edifizi a prova di Cannone e di Bomba.

99. I Cannoni non agiscono d' ordinario che contro le faccie esterne delle Muraglie e dei Terrapieni, e possono o fenderle e trapassarle, o rovesciarle sopra loro medesime. Si previene il primo pericolo, mediante una somma esattezza di costruire, e l' ottima scelta dei cementi delle leghe e dei materiali impiegati nel costruire. Quanto al secondo, è manifesto che la muraglia sarà tanto più resistente e tanto meno lascerà rovesciarsi dal Cannone, quanto il momento dell' urto di questo sarà minore del momento del peso di quella. Calcolata dunque la massima forza f del colpo, e data l' altezza a necessaria della muraglia, se ne determinerà in maniera l' ampiezza delle due basi, superiore e inferiore, che supposto bP il momento del peso, e $\phi \times CQ$ la resistenza relativa della base inferiore (36), si abbia sempre l' equazione $af = bP + \phi \times CQ$: o semplicemente $af = bP$; il che darà una sicurezza anche maggiore.

100. Quanto alle Bombe, esse non agiscono che sulle Volte. Affinchè le Volte possan reggerne il colpo, è soprattutto necessario, che le commettiture sieno sì esattamente normali alla curva inferiore, e i cunei sì ben tagliati e tanto larghi di dorso, che veruna forza applicata parzialmente ad uno di essi possa mai farlo scorrere attraverso dei due contigui, senza che questi cedendo si rimuovano alquanto dalla lor situazione. Allora si valuterà il peso della Volta come aumentato di tutto l' effetto della forza dovuta alla celerità con la quale la Bomba viene a colpirla; e dietro quest' Ipotesi si calcolerà, mediante l' equazione del num°. 61, la corrispondente grossezza dei Piè dritti, necessaria a sostenerla immobilmente.

F I N E.

Si terrà il presente Saggio il dì 2. Settembre 1805.

Pag.	vers.	ERRORI	CORREZIONI
7.	33.	f'	f
8.	13.	a due	e a due
9.	24.	AG	AI
	27. 29.	$\varphi \times$ MK	$\varphi \times$ MH
10.	4.	AB, DE	AD, BE
11.	8.	(20)	(22)
15.	12. 14. 17.	zz'	ZZ'
	ult.	dM	dM'
17.	35	GLHABE	GFHABE
18.	*in margine* 7.	. . . .	12.
19.	27.	x, π	$x, p = 0, \pi$
20.	16. 17.	$BC^2 : BD^2$	$AL^2 : DI^2$
	31. 32. 34.	. . . .	(si cangi C in D, D in H)
	34.	$r^2 \pi$, ...	$r''^2 \pi$
21.	1. 2.	AD . . . . . FDG . .	AH . . . . FHG
	20.	$\frac{\varphi \times \varphi H}{CQ}$ . . . . $p : p'$.	$\frac{2\varphi \times CQ}{QH}$ . . . . $p' : p$.
24.	13. 20.	OI, I''O'' .... OI, I'O'.	OII''O'' . . . . OII'O'
25.	14.	(32)	(30)
	16.	$\frac{dx''}{ds} \cos \gamma'$	$\frac{dx''}{ds}, \cos \gamma'$
	22.	$\varphi \cos \delta d (2rddy +$ ec.	$\varphi \cos \delta (2rddy +$ ec.
26.	18.	$\frac{dy^2}{ddy}$	$\frac{day}{dy^2}$
	25.	dx	dy
27.	16	X	x
28.	11.	AG	AP
29.	*ult.*	dx	dx^2
30.	1.	$x^2 \sqrt{(} 4x^2 +$ ec. . .	$2x^2 \sqrt{(} 4x^2 +$ ec.)
31.	6.	$2a$	2A
32.	28.	Gg	Gq

Tav. I.

16
17
18
19
20
21
22